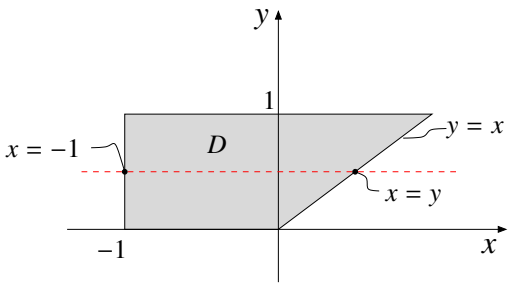
Cálculo 3A – EP8 – Revisão para a primeira VE – Gabarito

Exercício 1: Calcule a integral dupla de $f(x,y) = xy$ sobre a região D limitada por $x = -1$, $y = 1$, $y = x$ e o eixo x.

Solução: O esboço de D é:



As fronteiras da esquerda e da direita são respectivamente as retas $x = -1$ e $x = y$. Logo, $-1 \leq x \leq y$. Como a projeção de D sobre o eixo y é o intervalo $[0,1]$, então $0 \leq y \leq 1$. Logo D é do tipo II e

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1\,,\ -1 \leq x \leq y\}\ .$$

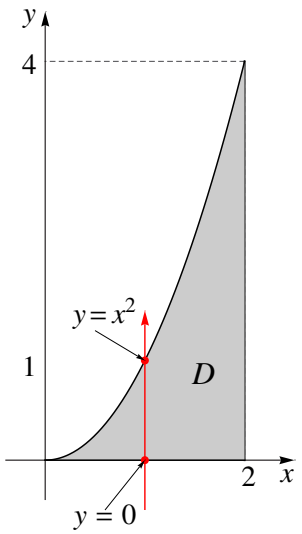
Então:

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^{y} xy\,dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2y}{2}\right]_{-1}^{y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^3 - y)\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\,.$$

Exercício 2: Calcule a integral iterada pela reversão da ordem de integração

$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\,dxdy\,.$$

Solução: Temos que $I = \iint_D \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\,dxdy$, onde $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 4\,,\ \sqrt{y} \leq x \leq 2\right\}$. Na faixa horizontal dada por $0 \leq y \leq 4$, esboçaremos as curvas $x = \sqrt{y}$ (ou $y = x^2\,,\ x \geq 0$) e $x = 2$. Assim, o esboço de D está representado na figura que se segue.



Descrevendo D como tipo I, temos que $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$. Então,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^{x^2} \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dydx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^5}} \int_0^{x^2} y\, dydx \\ &= \int_0^2 \left(1+x^5\right)^{-1/2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1+x^5\right)^{-1/2} x^4\, dx \end{aligned}$$

Fazendo $u = 1 + x^5$ temos $du = 5x^4\, dx$ donde $x^4\, dx = du/5$. Se $x = 0$, temos $u = 1$ e se $x = 2$, temos $u = 33$. Logo,

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{33} u^{-1/2}\, \frac{du}{5} = \frac{1}{10}\cdot 2\left[u^{1/2}\right]_1^{33} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{33}-1\right).$$

Exercício 3: Inverta a ordem de integração e calcule o valor de I em

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}} e^{x^3}\, dx\, dy + \int_1^4 \int_{\sqrt{y}/2} 1e^{x^3}\, dx\, dy.$$

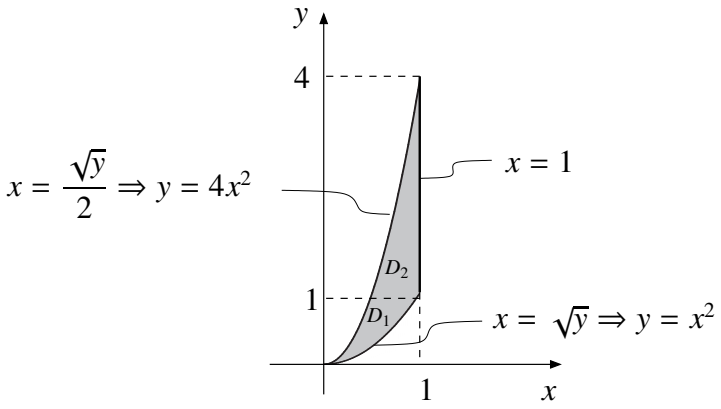
Solução: Temos $I = \iint_D e^{x^3}\, dxdy$, onde $D = D_1 \cup D_2$ com

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1\,,\ \frac{\sqrt{y}}{2} \le x \le \sqrt{y}\right\}$$

e

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 4\,,\ \frac{\sqrt{y}}{2} \le x \le 1\right\}.$$

Com as informações dadas acima, podemos ilustrar a nossa região D (ver figura na próxima página).



Enquadrando D como tipo I, temos

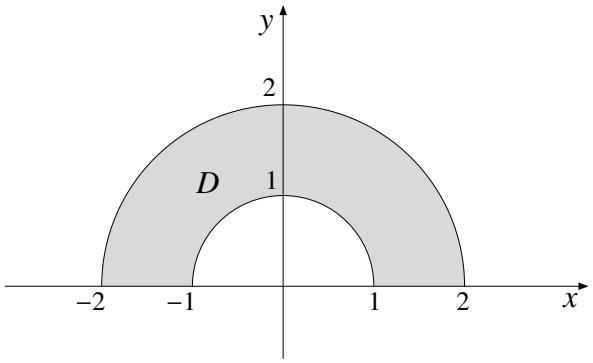
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\,,\ x^2 \le y \le 4x^2\right\}.$$

Então

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3}\, dydx = \int_0^1 e^{x^3}\left(4x^2 - x^2\right)\, dx = \int_0^1 e^{x^3}\left(3x^2\right)\, dx = e^{x^3}\Big|_0^1 = e - 1\,.$$

Exercício 4: Calcule a massa de uma placa contida na região de $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, com $y \geq 0$, cuja densidade no ponto $P = (x, y)$ é proporcional à distância do ponto à origem.

Solução: O esboço de D está representado na figura que se segue.



Como a distância de $P = (x, y)$ à origem é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$ então $\delta(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ onde k é o coeficiente de proporcionalidade. Temos:

$$M = \iint_D \delta(x, y)\, dxdy = k \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy\,.$$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

Observando a região D vemos que o ângulo polar θ varia de 0 (em $(2, 0)$) até π (em $(-2, 0)$). Fixando θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, o raio vetor r deve variar de 1 a 2. Então temos: $D_{r\theta} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$. Portanto:

$$\begin{aligned} M &= k \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2} r\, drd\theta = k \iint_{D_{r\theta}} r^2\, drd\theta \\ &= k \int_0^\pi \int_1^2 r^2\, drd\theta = k\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \int_0^\pi d\theta = \frac{7k\pi}{3}\ \ u.m. \end{aligned}$$

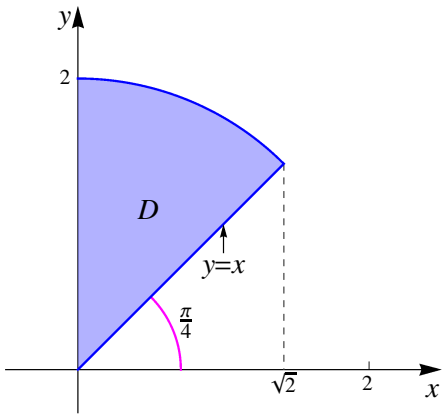
Exercício 5: Considere a região $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 \leq x \leq \sqrt{2},\ x \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\right\}$.

(a) Esboce a região D e descreva-a em coordenadas polares.

(b) Calcule a integral dupla de $f(x,y) = x$ sobre a região D.

Solução:

(a) De $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, temos que D está contida na faixa vertical, limitada pelas retas $x = 0$ e $x = \sqrt{2}$. De $x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$, temos que D está limitada inferiormente pela reta $y = x$ e superiormente pela curva $y = \sqrt{4-x^2}$ ou $x^2 + y^2 = 4$ com $y \geq 0$. Assim, temos o esboço de D:



Descrição de D em coordenadas polares:

$$D_{r\theta} : \begin{cases} \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 2. \end{cases}$$

(b) Temos $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D x\,dx\,dy.$

Passando para coordenadas polares, temos:

$$x = r\cos\theta, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Então,

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_{r\theta}} (r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \int_0^2 r^2\,dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta = \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta$$

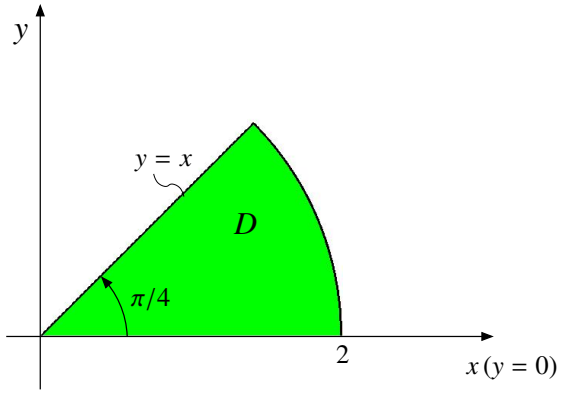
$$= \frac{8}{3}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Exercício 6: Definimos o valor médio de uma função $f(x,y)$ em uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ como a integral de $f(x,y)$ em D dividida pela área de D, isto é,

$$m(f,D) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\ dxdy\,.$$

Calcule o valor médio de $f(x,y) = x$ na região D do primeiro quadrante, limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$ e $y = 0$.

Solução: O esboço de D está representado na figura a seguir.



A área do setor circular D é:

$$A(D) = \frac{1}{8} \text{ área do disco de raio } 2 \ = \frac{1}{8}\pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{2} \ u.a.$$

Cálculo de $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dA = \iint_D x\ dA$

Utilizando coordenadas polares, temos que:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \\ dxdy &= rdrd\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

A região D transforma-se em:

$$D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}.$$

Então:

$$\iint_D x\ dA = \iint_{D_{r\theta}} (r\cos\theta) r\ drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} r^2\cos\theta\ drd\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta \int_0^2 r^2\ drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \cos\theta\ d\theta = \frac{8}{3}\Big[\,\text{sen}\,\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Assim:

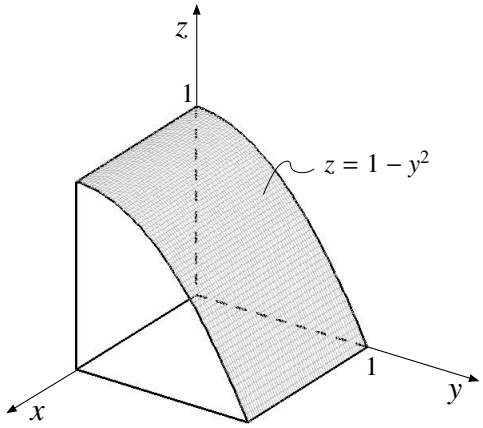
$$m(f,D) = \frac{1}{A(D)}\iint_D x\ dA = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}.$$

Exercício 7: Use uma integral tripla para determinar o volume do sólido do primeiro octante limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $y = x$, $x = 0$ e $z = 0$.

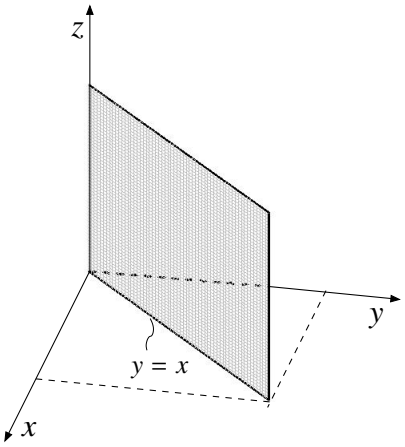
Solução:

Esboço de W

Esbocemos no plano yz a parábola $z = 1 - y^2$ com $y \geq 0$ e $z \geq 0$. Como a equação não depende da variável x então por pontos da curva tracemos no primeiro octante semirretas paralelas ao eixo x, obtendo assim a superfície $z = 1 - y^2$.



No plano xy esbocemos a semirreta $y = x$ com $x \geq 0$. Como esta equação não depende da variável z então por pontos da semirreta tracemos paralelas ao eixo z, obtendo assim a porção do plano $y = x$ no primeiro octante.



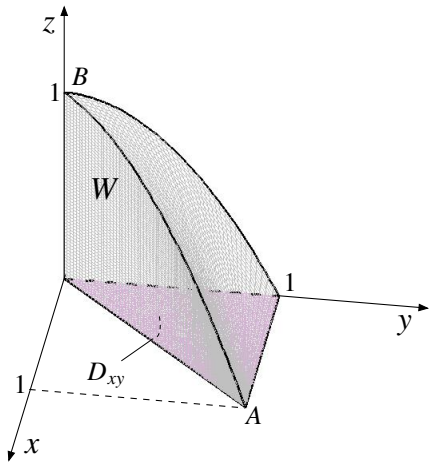
Vemos que os pontos $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$ são comuns às duas superfícies. Ligando-os temos a curva interseção. Considerando que o sólido é também limitado pelos planos $x = 0$ e $z = 0$, temos o sólido W representado na figura que se segue.

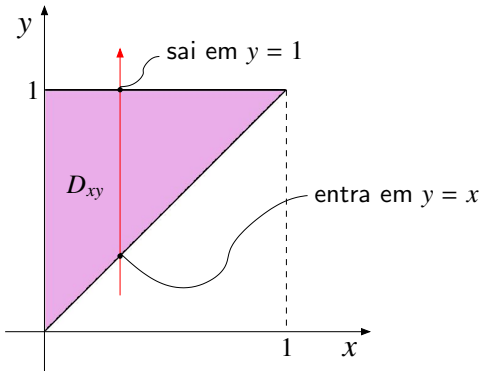
Descrição de W

Projetando W no plano xy, temos a região D_{xy}, dada por $D_{xy} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$.

Imaginemos uma reta paralela ao eixo z através de W, orientada como o eixo z. Vemos que ela entra em W em $z = 0$ e sai de W em $z = 1 - y^2$. Então:

$$W : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \leq z \leq 1 - y^2\right\}.$$





O volume de W é dado por

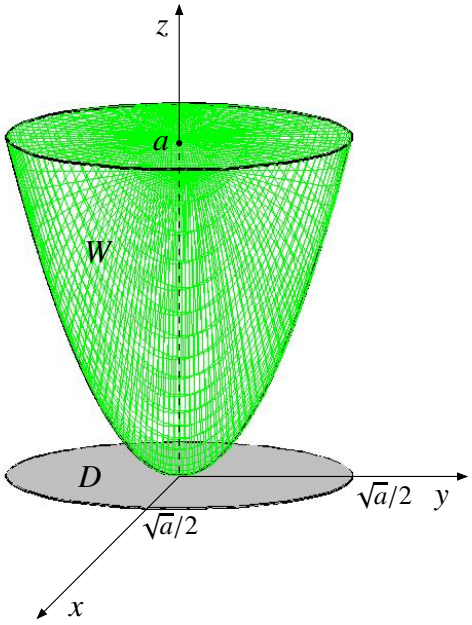
$$V(W) = \iiint_W dV = \iint_{D_{xy}} \int_0^{1-y^2} dzdxdy = \iint_{D_{xy}} \left(1-y^2\right) dxdy =$$

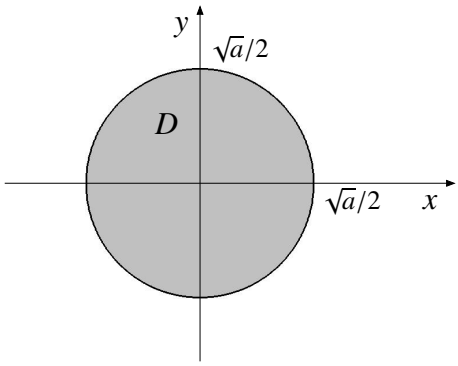
$$= \int_0^1 \int_x^1 \left(1-y^2\right) dydx = \int_0^1 \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_x^1 dx = \int_0^1 \left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\, u.v.$$

Exercício 8: Determine a massa e o centro de massa do sólido W limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$, com $a > 0$, se W tem densidade constante k.

Solução: De $z = 4x^2 + 4y^2$ e $z = a$ temos $4x^2 + 4y^2 = a$ donde $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2$. Então, a interseção do parabolóide com o plano é a circunferência $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2$ contida no plano $z = a$.





A massa M do sólido W é $M = \iiint_W \delta(x,y,z)dV = k\iiint_W dV$.

Descrição de W em coordenadas cilíndricas

Como a projeção de W no plano xy é o disco D_{xy} : $x^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2$, então temos $\begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{a}}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$.

Imaginemos, através de W, uma reta paralela ao eixo z, orientada como o eixo z. Ela entra em W em $z = 4x^2 + 4y^2 = 4r^2$ e sai de W em $z = a$. Logo, $4r^2 \leq z \leq a$. Assim, temos $W_{r\theta z}$: $\begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{a}}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 4r^2 \leq z \leq a\,. \end{cases}$.

Então:

$$M = k\iiint_{W_{r\theta z}} r\, dr d\theta dz = k\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r \int_{4r^2}^{a}\int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2k\pi \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r\int_{4r^2}^{a} dz dr$$

$$= 2k\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r\left(a - 4r^2\right)dr = 2k\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left(ar - 4r^3\right)dr = 2k\pi\left[\frac{ar^2}{2} - r^4\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}}$$

$$= 2k\pi\left(\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{16}\right) = \frac{2k\pi a^2}{16} = \frac{k\pi a^2}{8}\ u.m.$$

O centro de massa é dado por:

$$M\overline{x} = \iiint_W x\ \delta(x,y,z)\ dV = \iiint_W kx\ dV$$

$$M\overline{y} = \iiint_W ky\ dV$$

$$M\overline{z} = \iiint_W kz\ dV\,.$$

Como $f(x,y,z) = kx$ e $g(x,y,z) = ky$ são funções ímpares nas variáveis x e y, respectivamente, e W

tem simetria em relação aos planos yz e xz então $\iiint_W kx\ dV = 0$ e $\iiint_W ky\ dV = 0$. Assim, $\overline{x} = 0$ e $\overline{y} = 0$.

Cálculo de $\iiint_W kz\ dV$

Temos:

$$\iiint_W kz\ dV = k\iiint_{W_{r\theta z}} zr\ drd\theta dz = k\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r\int_{4r^2}^{a}\int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2k\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r\left[\frac{z^2}{2}\right]_{4r^2}^{a} dr =$$

$$= k\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} r\left(a^2 - 16r^4\right)dr = k\pi\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left(a^2 r - 16r^5\right)dr = k\pi\left[\frac{a^2r^2}{2} - \frac{8r^6}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} =$$

$$= k\pi\left(\frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{24}\right) = \frac{k\pi a^3}{12}.$$

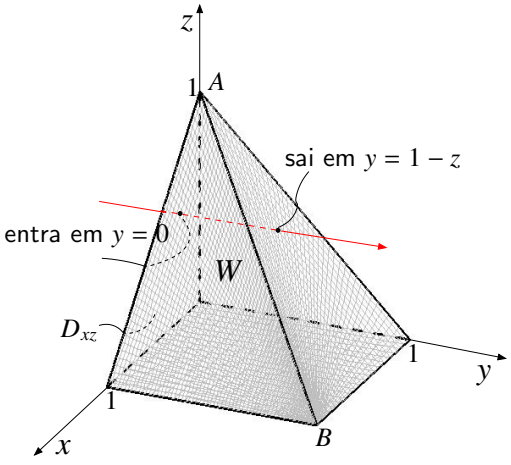
Logo $\frac{k\pi a^2}{8}\,\overline{z} = \frac{k\pi a^3}{12}$ donde $\overline{z} = \frac{2a}{3}$. Portanto, o centro de massa é $\left(0, 0, \frac{2a}{3}\right)$.

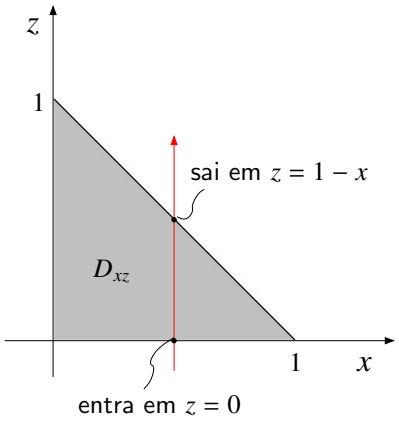
Exercício 9: Calcule a massa do sólido W limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$, sendo a densidade $\delta(x, y, z) = z$.

Solução:

Esboço do sólido W

Para esboçar o plano $y + z = 1$, traçamos inicialmente a reta $y + z = 1$ no plano yz. Como a equação não depende da variável x então por pontos da reta traçamos retas paralelas ao eixo x. Analogamente, esboçamos o plano $x + z = 1$. Observemos que os pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$ são comuns aos dois planos. Ligando-os por uma reta, obtemos a curva interseção. Considerando que W é limitado pelos planos coordenados, temos assim o esboço na figura que se segue.





Devemos projetar W no plano xz ou no plano yz, pois para projetar W no plano xy devemos dividir W em duas partes, usando o plano $y = x$. Então, projetemos W no plano xz. Imaginando através de

W uma reta paralela ao eixo y, orientada como o eixo y, vemos que ela entra em W em $y = 0$ e sai de W em $y = 1 - z$. Portanto:

$$W : \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D_{xz} \text{ e } 0 \leq y \leq 1 - z\right\}$$

com $D_{xz} : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{cases}$. A massa M do sólido W é:

$$M = \iiint_W \delta(x, y, z)\, dV = \iiint_W z\, dV = \iint_{D_{xz}} z \int_0^{1-z} dy dx dz = \iint_{D_{xz}} z(1 - z)\, dx dz =$$

$$= \iint_{D_{xz}} \left(z - z^2\right)\, dx dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(z - z^2\right)\, dz = \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(1 - x)^2}{2} - \frac{(1 - x)^3}{3}\right] dx\,.$$

Fazendo $u = 1 - x$ temos $dx = -du$. Para $x = 0$ temos $u = 1$ e para $x = 1$ temos $u = 0$. Então:

$$M = \int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right)(-du) = -\int_1^0 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right) du = \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3}\right) du = \left[\frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{12}\right]_0^1 =$$

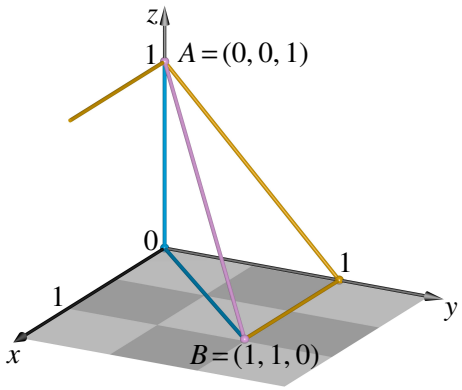
$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\ u.m.$$

Exercício 10: Calcule a massa do sólido homogêneo W, limitado pelos planos $y + z = 1$, $x = y$, $x = 0$ e $z = 0$.

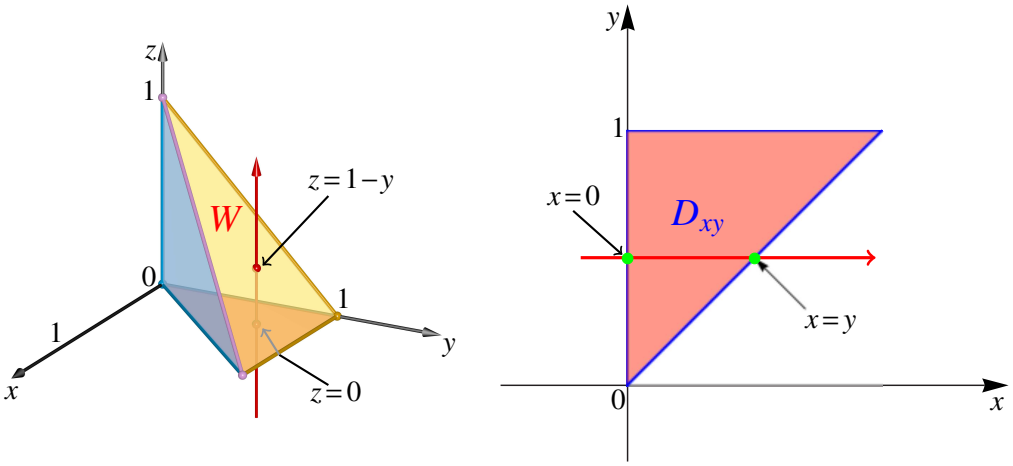
Solução: Identificação das superfícies:

- $y + z = 1 \Longrightarrow$ plano com geratrizes paralelas ao eixo x e diretriz, rata $y + z = 1$, no pnao yz;
- $x = y \Longrightarrow$ plano com geratrizes paralelas ao eixo z e diretriz, reta $x = y$, no plano xy;
- $x = 0 \Longrightarrow$ plano coordenado yz;
- $z = 0 \Longrightarrow$ plano coordenado xy.

Esboçando os planos $x + z = 1$ e $x = y$, vemos que os pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$ são comuns aos planos. Logo, a reta AB é a interseção dos planos.



Levando em conta que W é limitado pelos planos $x = 0$ e $z = 0$, temos o esboço de W.



Temos $W : (x, y) \in D_{xy},\ 0 \le z \le 1 - y$.

Como W é um sólido homogêneo, então a densidade é constante: $\delta(x, y, z) = k$.

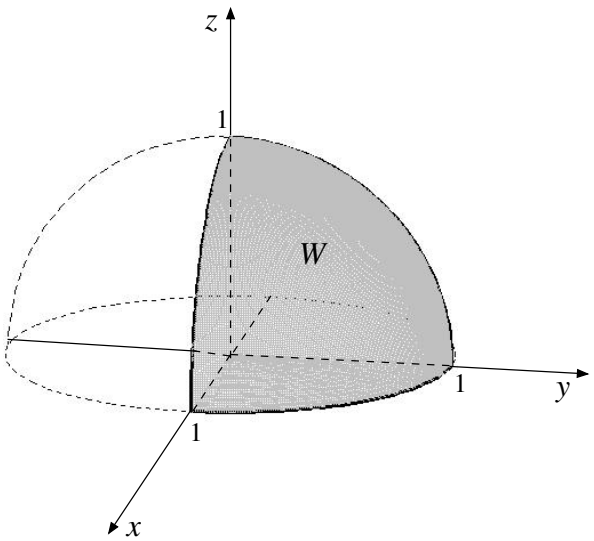
Assim a massa M é dada por

$$\begin{aligned} M &= \iiint_W \delta(x,y,z)\,dV = k\iiint_W dV = k\iint_{D_{xy}}\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy = k\iint_{D_{x,y}} (1-y)dx\,dy \\ &= k\int_0^1 (1-y)\int_0^y dx\,dy = k\int_0^1 (1-y)y\,dy = k\int_0^1 (y-y^2)\,dy = k\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{k}{6}. \end{aligned}$$

Logo, $M = \dfrac{k}{6}$ u.m.

Exercício 11: Calcule $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)^3\,dV$, onde W é limitado pelos planos coordenados e pela porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, pertence ao primeiro octante.

Solução: Solução: O esboço de W está representado na figura que se segue.



Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho\cos\phi \\ dV &= \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 &= \rho^2 \end{cases}.$$

Então,

$$\iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dV = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \left(\rho^2\right)^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^8 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta$$

onde $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \phi \le \pi/2$. Logo,

$$\begin{aligned} \iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)^3 dV &= \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \rho^8 \operatorname{sen}\phi \; d\theta d\phi d\rho = \int_0^1 \rho^8 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{\pi/2} d\theta d\phi d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^8 \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} d\rho = \frac{\pi}{2}(0+1)\left[\frac{\rho^9}{9}\right]_0^1 = \frac{\pi}{18}. \end{aligned}$$

Exercício 12: Seja C uma curva interseção do cilindro elíptico $2x^2 - 4x + y^2 = 0$ com o plano $x + z = 1$.

(a) Apresente uma paremetrização diferenciável para C.

(b) Calcule $\displaystyle\int_C \sqrt{2}x\, ds$.

Solução:

(a) Completando quadrados em $2x^2-4x+y^2=0$ temos $2\left(x^2-2x+1\right)+y^2=2$ ou $(x-1)^2+\frac{y^2}{2}=1$, que é uma elipse com $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$. Então, considerando $(x,y,z) \in C$ temos que x, y e z satisfazem

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = 1 & (1) \\ z = 1 - x & (2) \end{cases}$$

De (1) temos que $x = 1 + \cos t$ e $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$, com $0 \le t \le 2\pi$. De (2) temos que $z = 1 - (1+\cos t) = -\cos t$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\gamma(t) = (1+\cos t,\ \sqrt{2}\operatorname{sen} t, -\cos t)$$

com $0 \le t \le 2\pi$.

(b) Temos que

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2}\cos t, \operatorname{sen} t)$$

donde

$$\left|\gamma'(t)\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2}\,.$$

Como $ds = \left|\gamma'(t)\right| dt$ então $ds = \sqrt{2}\,dt$. Assim:

$$\int_C \sqrt{2}\; x\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+\cos t)\,\sqrt{2}\; dt = 2\Big[t + \operatorname{sen} t\Big]_0^{2\pi} = 4\pi\,.$$

Exercício 13: Seja a curva C parte da interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ com o plano $y = \sqrt{2}x$, situada no primeiro octante.

(a) Parametrize C.

(b) Calcule a massa de C sendo a densidade dada por $\delta(x, y, z) = x + y$.

Solução:

(a) De $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $y = \sqrt{2}x$ com $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, temos $3x^2 + z^2 = 9$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$ ou $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Significa então que a projeção de C no plano xz é a porção da elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{9} = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$. Então $x = \sqrt{3}\cos t$ e $z = 3\operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq \pi/2$. Como $y = \sqrt{2}x$, então $y = \sqrt{6}\cos t$. Assim, uma parametrização de C é dada por $\gamma(t) = \left(\sqrt{3}\cos t,\ \sqrt{6}\cos t, 3\operatorname{sen} t\right)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$.

(b) Temos que $\gamma'(t) = \left(-\sqrt{3}\operatorname{sen} t, -\sqrt{6}\operatorname{sen} t, 3\cos t\right)$, donde

$$ds = \|\gamma'(t)\|\; dt = \sqrt{3\operatorname{sen}^t + 6\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\; dt = \sqrt{9\operatorname{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\; dt = 3\; dt\,.$$

Como $M = \displaystyle\int_C \delta(x, y, z)\; ds$ então:

$$\begin{aligned} M &= \int_C (x+y)ds = \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{3}\cos t + \sqrt{6}\cos t\right) 3\; dt = 3\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\int_0^{\pi/2} \cos t\; dt \\ &= 3\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\Big[\operatorname{sen} t\Big]_0^{\pi/2} = 3\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\ \ u.m. \end{aligned}$$

Exercício 14: Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da semi esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$, $x \geq 0$, com o plano $y+z = 4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x, y, z) é dada por $\delta(x, y, z) = x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\frac{32M}{3}$, onde M é a massa do arame.

Solução: De $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, com $x \geq 0$ e $y + z = 4$, temos $x^2 + y^2 + (4-y)^2 = 16$, com $x \geq 0$ ou $x^2 + 2y^2 - 8y = 0$, com $x \geq 0$ ou $x^2 + 2\left(y^2 - 4y + 4\right) = 8$, com $x \geq 0$ ou $\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$, com $x \geq 0$

(semi-elipse) que representa a projeção de C sobre o plano xy. Então $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $y = 2 + 2\operatorname{sen} t$, e $z = 4 - y = 2 - 2\operatorname{sen} t$, com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ pois $x = \sqrt{2}\cos t \geq 0$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por:

$$\gamma(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t, 2 + 2\operatorname{sen} t, 2 - 2\operatorname{sen} t\right)$$

com $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Logo

$$\gamma'(t) = \left(-2\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2\cos t, -2\cos t\right)$$

donde

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{8\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{8\operatorname{sen}^2 t + 8\cos^2 t} = 2\sqrt{2}\,.$$

Assim,

$$ds = \|\gamma'(t)\|\ dt = 2\sqrt{2}\ dt\,.$$

Como

$$M = \int_C \delta(x,y,z)\ ds = \int_C x\ ds$$

então:

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2\sqrt{2}\cos t\right) 2\sqrt{2}\ dt = 8\Big[\operatorname{sen} t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 16\ \ u.m.$$

Por outro lado, o momento de inércia em relação ao eixo x é dado por:

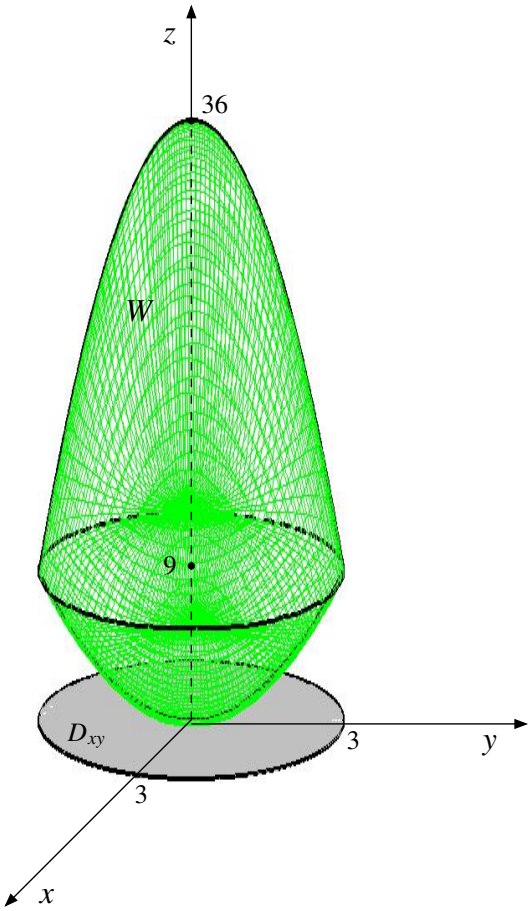
$$\begin{aligned}
I_x &= \int_C \left(y^2 + z^2\right)\delta(x,y,z)\ ds = \int_C \left(y^2 + z^2\right) x\ ds \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(2 + 2\operatorname{sen} t)^2 + (2 - 2\operatorname{sen} t)^2\right]\left(2\sqrt{2}\cos t\right) 2\sqrt{2}\ dt \\
&= 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4 + 8\operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4 - 8\operatorname{sen} t + 4\operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\ dt \\
&= 64\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + \operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\ dt = 64\left[\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= 64\left(2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{512}{3} = \frac{32}{3}\cdot 16\,.
\end{aligned}$$

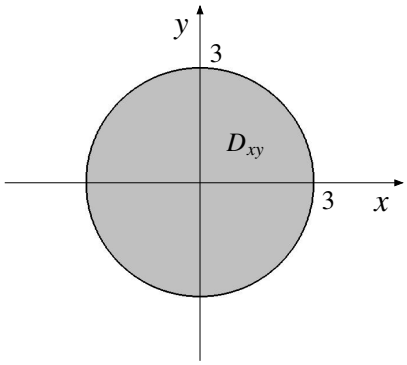
Logo:

$$I_z = \frac{32M}{3}\,.$$

Exercício 15: Use uma integral tripla para calcular o volume da região W limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

Solução: De $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$ temos $4x^2 + 4y^2 = 36$ ou $x^2 + y^2 = 9$ e $z = 9$ o que significa que os parabolóides se interceptam no plano $z = 9$, segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 9$. Assim, temos o esboço de W representado na figura que se segue.





O volume de W é $V(W) = \iiint_W dV$. Calculemos a integral utilizando coordenadas cilíndricas. Temos

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dV &= rdrd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}.$$

Descrição de W em coordenadas cilíndricas

Como a projeção de W no plano xy é o disco D_{xy} : $x^2 + y^2 \leq 9$, então $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Imaginemos, através de W, uma reta paralela ao eixo z, orientada como o eixo. Ela entra em W em $z = x^2 + y^2 = r^2$ e sai de W em $z = 36 - 3x^2 - 3y^2 = 36 - 3r^2$. Logo, $r^2 \leq z \leq 36 - 3r^2$. Assim, temos $W_{r\theta z}$: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 36 - 3r^2 \end{cases}$. Então:

$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_{W_{r\theta z}} r\, dr d\theta dz = \int_0^3 r \int_{r^2}^{36-3r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dz dr = 2\pi \int_0^3 r \int_{r^2}^{36-3r^2} dz dr \\ &= 2\pi \int_0^3 r\left(36 - 4r^2\right) dr = 2\pi \int_0^3 \left(36r - 4r^3\right) dr = 2\pi \left[18r^2 - r^4\right]_0^3 \\ &= 2\pi\left(18 \times 9 - 3^4\right) = 162\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exercício 16: Considere a região

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}.$$

(a) Esboce a região W e descreva-a em coordenadas esféricas.

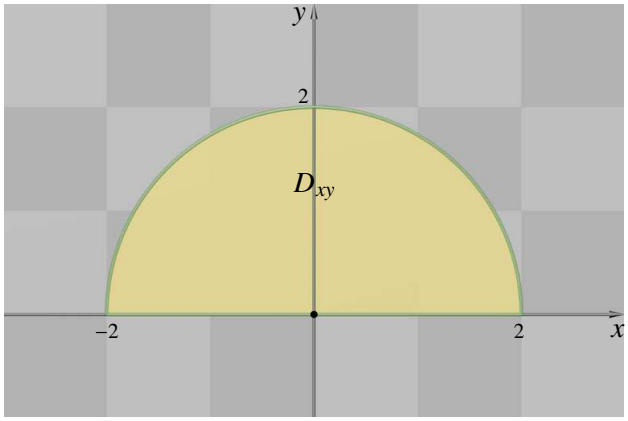
(b) Calcule a integral tripla de $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}$ sobre a região W.

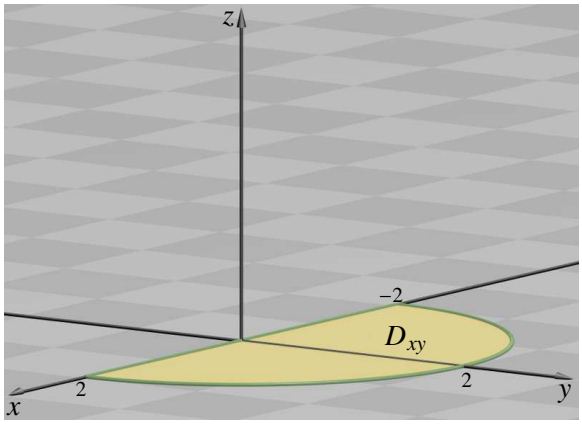
Solução:

(a) Temos

$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x, y) \in D_{xy} \text{ e } 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\},$$

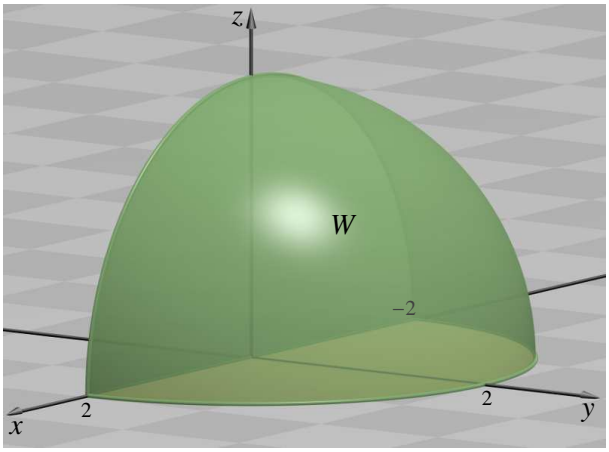
onde $D_{xy} : -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$ é a projeção de W sobre o plano xy e cujo esboço é:





De $0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, vemos que a região W está limitada inferiormente pelo plano $z = 0$ e superiormente pela superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $z \ge 0$.

Logo, o esboço de W é:



Descrição de W em coordenadas esféricas:

Do esboço de D_{xy}, vemos que $0 \le \theta \le \pi$. De $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ vemos que $0 \le \rho \le 2$. Como $z \ge 0$, temos $0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$. Portanto,

$$W_{\rho\phi\theta} : 0 \le \theta \le \pi, \;\; 0 \le \rho \le 2, \;\; 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

(b) Temos,

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{5/2} dV.$$

Passando para coordenadas esféricas,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \quad dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{5/2} dV &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho^2)^{5/2} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^7 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= \int_0^2 \rho^7 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{\pi} d\theta \, d\phi \, d\rho = \pi \int_0^2 \rho^7 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\rho \\
&= \pi \int_0^2 \rho^7 \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi/2} d\rho = \pi \int_0^2 \rho^7 \left[-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right] d\phi \\
&= \pi \int_0^2 \rho^7 \, d\rho = \pi \Big[\frac{\rho^8}{8} \Big]_0^2 = 32\pi.
\end{aligned}$$

Exercício 17: Seja a curva C parte da interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, situada no primeiro quadrante.

(a) Dê uma parametrização diferenciável para C.

(b) Calcule a massa de C, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = xyz$.

Solução:

(a) De $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $x^2 + y^2 = 4$ temos $z = 2\sqrt{3}$ pois $z \ge 0$. Assim, C é um arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$, no primeiro octante, contida no plano $z = 2\sqrt{3}$. Então, $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$ e $z = 2\sqrt{3}$. Como $x \ge 0$ e $y \ge 0$ então $0 \le t \le \pi/2$. Logo, uma parametrização é dada

por

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 2\sqrt{3}),$$

com $0 \le t \le \pi/2$.

(b) Temos que $M = \displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\, ds = \int_C xyz\, ds$, onde

$$ds = \|\gamma'(t)\|\, dt = \|(-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 0)\|\, dt = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\, dt = 2\, dt\,.$$

Então,

$$M = \int_0^{\pi/2} (2\cos t)(2\,\mathrm{sen}\, t) 2\sqrt{3}\cdot 2\, dt = 16\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{sen}\, t\, dt = 16\sqrt{3}\left[\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 8\sqrt{3}\ \ u.m.$$

Exercício 18: Passe para coordenadas polares e calcule

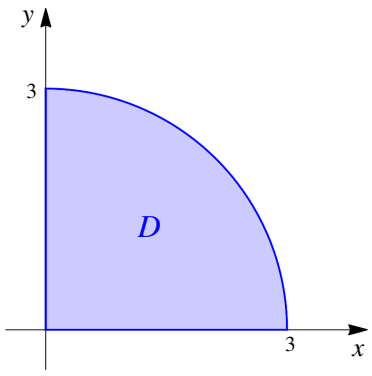
$$I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dy\, dx.$$

Solução: Temos $I = \displaystyle\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$, com

$$D : 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}.$$

De $0 \le x \le 3$, vemos que D está limitada pela esquerda pela reta $x = 0$ e pela direita pela reta $x = 3$.

De $0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}$, vemos que D está limitada inferiormente pela reta $y = 0$ e superiormente pela curva $y = \sqrt{9 - x^2}$, ou $x^2 + y^2 = 9$, $y \ge 0$. Assim, o esboço de D é:



Passando para coordenadas polares, temos

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Então,

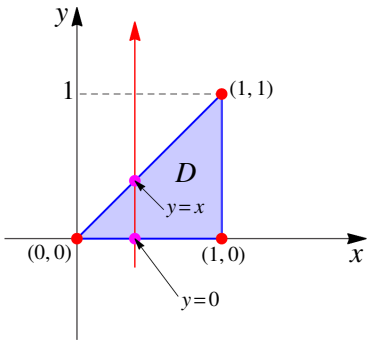
$$\iint_{D_{r\theta}} \sqrt{9 - x^2}\, r\, dr\, d\theta, \text{ com } D_{r\theta} : 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$I = \int_0^3 \left(9-r^2\right)^{1/2} r \int_0^{\pi/2} d\theta\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^3 \left(9-r^2\right)^{1/2} r\, dr = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^3 \left(9-r^2\right)^{1/2}(-2r)\, dr$$
$$= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_0^3 = -\frac{\pi}{6}\left(0-9^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot 27 = \frac{9\pi}{2}.$$

Exercício 19: Calcule $\iint_D y\,dx\,dy$, onde D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Solução: O esboço da região D é:



Descrição de D como uma região do tipo I:

$$D : 0 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le x.$$

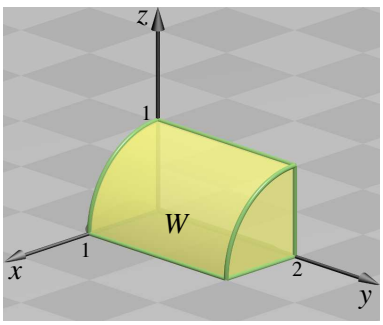
Então

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Exercício 20: Use uma integral tripla para determinar o volume do sólido W, no primeiro octante, limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$.

Solução: Esboço de W.

Esbocemos no plano xy a parábola $z = 1 - x^2$, com $x \ge 0$ e $z \ge 0$. Como a equação não depende da variável y, então as geratrizes desse cilindro são semirretas paralelas ao eixo y. Como W é limitado pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$, temos o esboço de W:



Temos

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, (x,y) \in D \quad \text{e} \quad 0 \le z \le 1 - x^2\right\},$$

onde D é a projeção de W sobre o plano xy. Logo,

$$D : 0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Temos

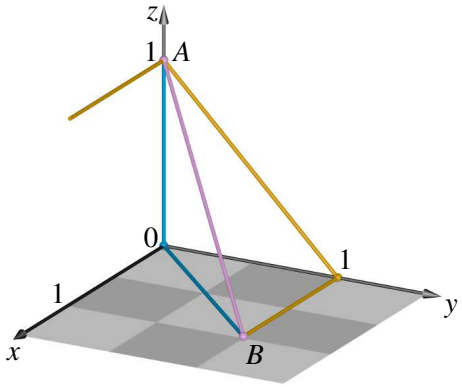
$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dV = \iint_D \int_0^{1-x^2} dz\,dx\,dy = \iint_D (1-x^2)dx\,dy \\ &= \int_0^1 (1-x^2) \int_0^2 dy\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exercício 21: Use uma integral tripla para calcular o volume do sólido W limitado pelos planos $y + z = 1$, $y = x$, $z = 0$ e $x = 0$.

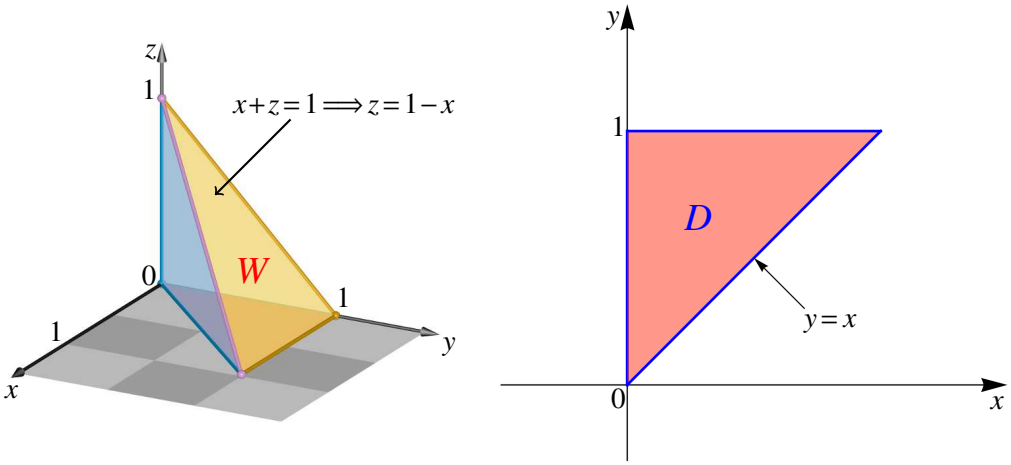
Solução: Identificação das superfícies:

- $y + z = 1 \Longrightarrow$ plano com geratrizes paralelas ao eixo x e diretriz $y + z = 1$ (reta) no plano yz.
- $y = x \Longrightarrow$ plano com geratrizes paralelas ao eixo z e diretriz $y = x$ (reta) no plano xy.
- $z = 0 \Longrightarrow$ plano coordenado xy.
- $x = 0 \Longrightarrow$ plano coordenado yz.

Esboçando os planos $y + z = 1$ e $y = x$, vemos que os pontos $A = (0, 0, 1)$ e $B = (1, 1, 0)$ são comuns a esses planos. Portanto, a reta AB é a interseção desses planos.



Levando em conta que o sólido W é limitado pelos planos $z = 0$ e $x = 0$, temos o seu esboço.



Projetando o sólido W no plano xy, encontramos o triângulo D, dado por

$$D : 0 \leq x \leq 1\,, \quad x \leq y \leq 1.$$

Considerando uma paralela ao eixo z, por um ponto $P = (x, y, z)$ no interior de W, vemos que essa paralela entra no sólido W em $z = 0$ e sai de W em $z = 1 - x$. Logo, $0 \leq z \leq 1 - x$.

Assim, W é dado por:

$$W : 0 \leq y \leq 1\,, \quad 0 \leq x \leq y\,, \quad 0 \leq z \leq 1 - x.$$

Temos

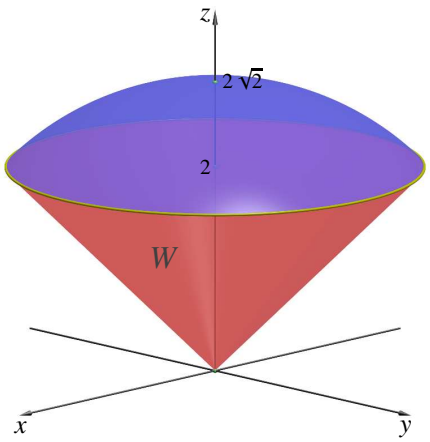
$$\begin{aligned} V(W) &= \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint_D \int_0^{1-x} dz\,dx\,dy = \iint_D (1-x)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (1-x)\,dy\,dx = \int_0^1 (1-x)(1-x)\,dx = \int_0^1 (1-x)^2\,dx \\ &= -\left[\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Logo, $V(W) = \dfrac{1}{3}\,u.v.$

Exercício 22: Calcule a massa do sólido W limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, se a densidade em (x, y, z) é dada por $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solução: De $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ou $x^2 + y^2 = z^2$) temos $2z^2 = 8$, donde $z = 2$ e $x^2 + y^2 = 4$. Logo, as superfícies se intersectam no plano horizontal $z = 2$, segundo um círculo de raio 2.

Assim, o esboço de W é:



Temos $M = \iiint_W \delta(x, y, z)\,dV = \iiint_W \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV.$

Passando para coordenadas esféricas, temos

$$x = \rho\,\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho\cos\phi, \quad dV = \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Descrição de W em coordenadas esféricas:

$$W_{\rho\phi\theta} : 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Então,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \sqrt{\rho^2}\,\rho^2 \,\operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^3 \,\operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \int_0^{2\pi} d\theta\, d\phi\, d\rho = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^3 \Big[-\cos\phi \Big]_0^{\pi/4} d\rho \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{2}} = \pi\left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^4}{4} = 16\pi\left(2 - \sqrt{2}\right) u.m. \end{aligned}$$

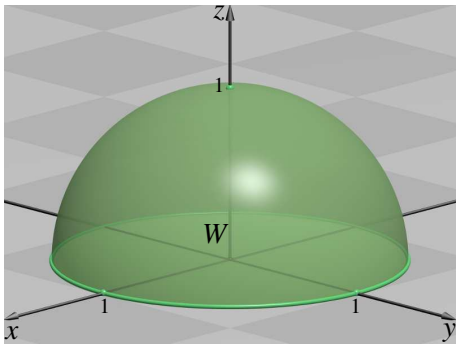
Exercício 23: Se $P(x,y,z) = xy^2$, $Q(x,y,z) = yz^2$ e $R(x,y,z) = zx^2$, calcule

$$\iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV,$$

onde W é o sólido dado por

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,, \quad z \ge 0\right\}.$$

Solução: O esboço de W é:



Se $P(x,y,z) = xy^2$, $Q(x,y,z) = yz^2$ e $R(x,y,z) = zx^2$, então $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2$. Logo,

$$\iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

Passando para coordenadas esféricas, temos

$$(x^2 + y^2 + z^2) dV = (\rho^2)\,\rho^2 \,\operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta,$$

e, nessas coordenadas, o sólido W se descreve por:

$$W_{\rho\phi\theta} : 0 \le \rho \le 1\,, \quad 0 \le \phi \le \pi/2\,, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iiint_W \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^1 \rho^4 \int_0^{2\pi} d\theta\, d\rho\, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^1 \rho^4\, d\rho\, d\phi \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = \frac{2\pi}{5}\,\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{5}\,(0+1) = \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

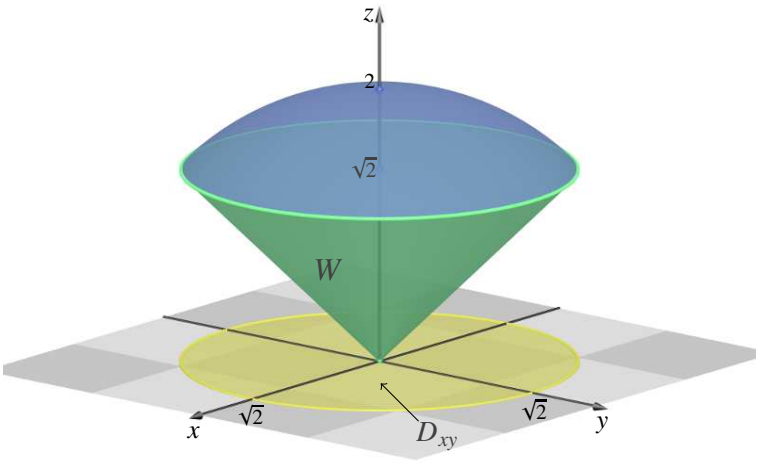
Exercício 24: Considere o sólido W que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e acima do cone

$z = \sqrt{x^2+y^2}$. Sabendo que a densidade é dada por $\delta(x,y,z) = z^3$, indique (**sem calcular**) a massa de W em coordenadas esféricas na ordem de integração $d\theta\, d\rho\, d\phi$.

Solução: De $x^2+y^2+z^2 = 4$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ou $z^2 = x^2+y^2$, temos $2z^2 = 4$ e $2(x^2+y^2) = 4$, donde $z = \sqrt{2}$ e $x^2+y^2 = 2$.

Daí concluímos que as superfícies se intersectam no plano horizontal $z = \sqrt{2}$, segundo uma circunferência de centro $(0,0,\sqrt{2})$ e raio $\sqrt{2}$.

Assim, temos o esboço do sólido W:



A massa de W é dada por $M = \iiint_W \delta(x,y,z)\, dV = \iiint_W z^3\, dV$.

Passando para coordenadas esféricas, temos:

$$x = \rho\ \text{sen}\,\phi\ \cos\theta, \quad y = \rho\ \text{sen}\,\phi\ \text{sen}\,\theta, \quad z = \rho\ \cos\phi,$$
$$dV = \rho^2\ \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta, \quad x^2+y^2+z^2 = \rho^2.$$

O sólido W transforma-se em:

$$W_{\rho\phi\theta} : 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \phi \le \pi/4,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho\ \cos\phi)^3\, \rho^2\ \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^5\ \cos^3\phi\ \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4}\int_0^2\int_0^{2\pi} \rho^5\ \cos^3\phi\ \text{sen}\,\phi\, d\theta\, d\rho\, d\phi. \end{aligned}$$

Exercício 25: Considere a integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\ dzdydx\,.$$

a) Escreva a integral em coordenadas cilíndricas.

b) Calcule o valor de I.

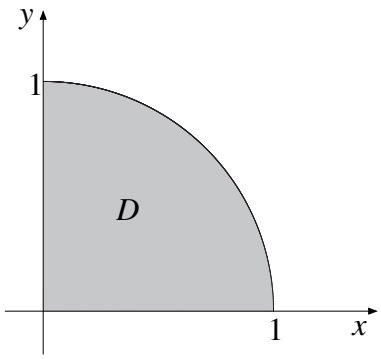
Solução: a) A região de integração é

$$W = \left\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\,,\ (x,y) \in D\right\}$$

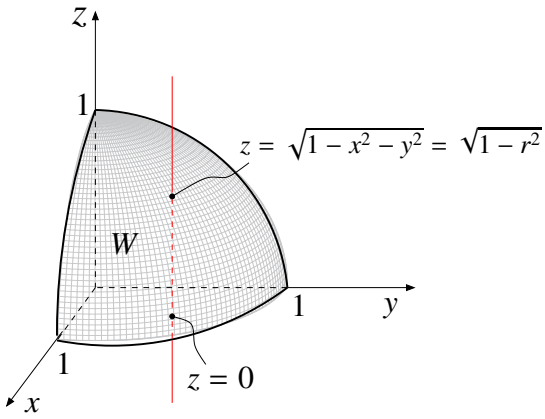
onde D é dado por

$$D : 0 \leq x \leq 1\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

é a projeção de W sobre o plano xy, cujo esboço é:



O esboço de W é:



Passando para coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \\ dxdydz &= r\ drd\theta dz \\ x^2+y^2 &= r^2 \end{cases}$$

O conjunto $W_{r\theta z}$ é dado por:

$$W_{r\theta z} : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2} \end{cases}$$

Logo,

$$I = \iiint_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint_{W_{r\theta z}} zr\cdot r\,drd\theta dz = \iiint_{W_{r\theta z}} zr^2\,drd\theta dz = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\pi/2} zr^2\,d\theta dzdr\,.$$

b)

$$I = \int_0^1 r^2\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\int_0^{\pi/2} d\theta dzdr = \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 r^2\int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\,dzdr = \tfrac{\pi}{2}\int_0^1 r^2\Big[\tfrac{z^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1-r^2}}\,dr = \tfrac{\pi}{4}\int_0^1 r^2(1-r^2)\,dr =$$

$$= \tfrac{\pi}{4}\int_0^1 (r^2-r^4)\,dr = \tfrac{\pi}{4}\Big[\tfrac{r^3}{3}-\tfrac{r^5}{5}\Big]_0^1 = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}\right) = \tfrac{\pi}{30}\,.$$

Exercício 26: Considere a integral

$$I = \int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\,dzdydx\,.$$

a) Escreva a integral em coordenadas esféricas.

b) Calcule o valor de I.

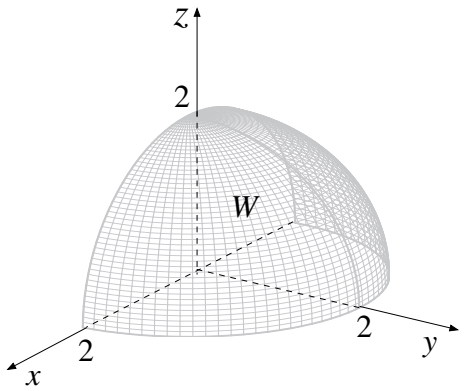
Solução: a) A região de integração é

$$W = \left\{(x,y,z)\mid 0\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\,,\,(x,y)\in D\right\}$$

onde D é dado por

$$D: -2\le x\le 2\,,\ 0\le y\le \sqrt{4-x^2}\,.$$

O esboço de W é:



Passando para coordenadas esféricas, tem-se:

$$\begin{cases} x &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= \rho\cos\phi \\ dxdydz &= \rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\;d\rho d\phi d\theta \\ x^2+y^2+z^2 &= \rho^2 \end{cases}$$

O conjunto $W_{\rho\phi\theta}$ é dado por:

$$W_{\rho\phi\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{cases}$$

Então:

$$I = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)^{1/2}\, dxdydz = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} (\rho^2)^{1/2} \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta = \iiint_{W_{\rho\phi\theta}} \rho^3 \operatorname{sen}\phi \; d\rho d\phi d\theta\,.$$

b)

$$I = \int_0^2 \rho^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \int_0^{\pi} d\theta d\phi d\rho = \pi \int_0^2 \rho^3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \; d\phi d\rho = -\pi \Big[\cos\phi\Big]_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^3 \; d\rho = \pi \Big[\tfrac{\rho^4}{4}\Big]_0^2 = 4\pi\,.$$

Exercício 27: Considere a integral iterada dada em coordenadas cilíndricas:

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r^2 \operatorname{sen}\theta \; dzdrd\theta\,.$$

a) Expresse I em coordenadas esféricas segundo a ordem de integração $d\theta d\varphi d\rho$.

b) Calcule o valor de I.

Solução:

a) Inicialmente, passaremos de coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \\ dxdydz = r\; dzdrd\theta \end{cases}.$$

Logo,

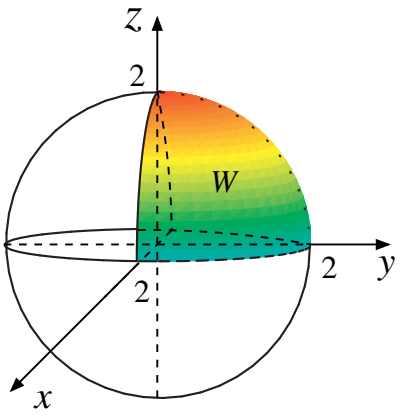
$$r^2 \operatorname{sen}\theta \; dzdrd\theta = r\operatorname{sen}\theta \; rdzdrd\theta = y \; dxdydz\,.$$

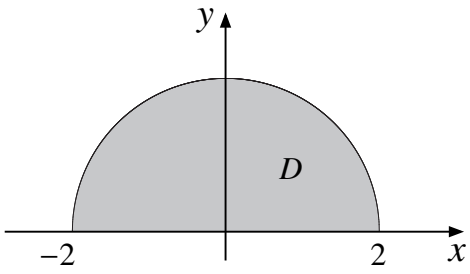
A equação $z = \sqrt{4-r^2}$ em coordenadas cartesianas é $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ ou $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$. Logo, a imagem do conjunto Q dado por

$$Q: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

é o sólido W dado por

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\,,\ (x,y) \in D\right\},$$





onde D é dado abaixo:

Então

$$I = \iiint_W y \; dxdydz \, .$$

Passando para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho\cos\varphi \\ dxdydz &= \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta \end{cases} .$$

Temos que W é a imagem de

$$Q : \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases} .$$

Então

$$\begin{aligned} I &= \iiint_Q \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta \\ &= \iiint_Q \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \; d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}\theta \; d\theta d\varphi d\rho \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2\int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\, d\varphi d\rho \\ &= 2\int_0^2\int_0^{\pi/2} \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\; d\varphi d\rho \\ &= 2\int_0^2 \rho^3\cdot\frac{1}{2}\left[\varphi-\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 \rho^3\; d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Exercício 28: Seja C um fio delgado com a forma da interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com o semiplano $z=\sqrt{3}y$, com $y\geq 0$.

(a) Apresente uma parmetrização diferenciável de C.

(b) Calcule a massa do fio C, sabendo que a densidade de massa é dada por $\delta(x,y,z)=z$

Solução: (a) De $x^2+y^2+z^2=4$ e $z=\sqrt{3}y$, $y\geq 0$, temos

$$x^2+y^2+3y^2=4,\ y\geq 0 \Longrightarrow x^2+4y^2=4,\ y\geq 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=1,\ y\geq 0.$$

Logo, $x=2\cos t$, $y=\operatorname{sen}t$, com $0\leq t\leq\pi$, pois $y\geq 0$.

Como $z=\sqrt{3}y$, então $z=\sqrt{3}\operatorname{sen}t$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é dada por

$$\vec{r}(t)=(2\cos t,\operatorname{sen}t,\ \sqrt{3}\operatorname{sen}t),\quad 0\leq t\leq\pi.$$

(b) Temos $M=\displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\,ds=\int_C z\,ds$, onde $ds=\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$.

Sendo que $\vec{r}\,'(t)=(-2\operatorname{sen}t,\cos t,\ \sqrt{3}\cos t)$, temos

$$\|\vec{r}\,'(t)\|=\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t+3\cos^2 t}=\sqrt{4\operatorname{sen}^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{4}=2.$$

Logo, $ds=\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt=2\,dt$.

Portanto,

$$M=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\operatorname{sen}t\cdot 2\,dt=2\sqrt{3}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}t\,dt=2\sqrt{3}\,[-\cos t]_0^{\pi}=2\sqrt{3}\cdot 2=4\sqrt{3}\,u.m.$$

Exercício 29: Um fio fino de densidade $\delta(x,y,z) = z$, encontra-se ao longo da curva C dada por $\vec{r}(t) = (2\cos t)\vec{i} + (2\,\mathrm{sen}\,t)\vec{j} + t\vec{k}$, $0 \le t \le 2\pi$. O momento de inércia do fio em relação ao eixo z é dado pela integral

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,ds.$$

Encontre o valor de I_z.

Solução: Se $\vec{r}(t) = (2\cos t)\vec{i} + (2\,\mathrm{sen}\,t)\vec{j} + t\vec{k} = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, t)$, então $\vec{r}\,'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\,t, 2\cos t, 1)$, donde $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Como $ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$, então $ds = \sqrt{5}\,dt$. Temos:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_C (x^2+y^2)z\,ds = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2 t)t\,\sqrt{5}\,dt \\ &= 4\sqrt{5}\int_0^{2\pi} t\,dt = 4\sqrt{5}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\sqrt{5}\,4\pi^2 = 8\sqrt{5}\,\pi^2. \end{aligned}$$

Exercício 30: Seja a curva C parte da interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$ com o plano $z = \sqrt{2}\,x$, situada no primeiro octante.

(a) (1,0 ponto) Apresente uma parametrização diferenciável de C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a massa de C, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = \sqrt{6}\,z$.

Solução:

(a) De $x^2+y^2+z^2 = 9$ e $z = \sqrt{2}\,x$, temos $x^2+y^2+2x^2 = 9$, donde $3x^2+y^2 = 9$ ou $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ (elipse de centro $(0,0)$ e semieixos $a = \sqrt{3}$, $b = 3$). Então $x = \sqrt{3}\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, $z = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}\cos t\right) = \sqrt{6}\cos t$. Como C está no primeiro octante, então $x \ge 0$, $y \ge 0$ e $z \ge 0$. Logo, $\sqrt{3}\cos t \ge 0$, $3\,\mathrm{sen}\,t \ge 0$, $\sqrt{6}\cos t \ge 0$, donde $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Assim, uma parametrização diferenciável de C é:

$$C : \vec{r}(t) = \left(\sqrt{3}\cos t,\ 3\,\mathrm{sen}\,t,\ \sqrt{6}\cos t\right), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

(b) Temos $M = \displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\,ds = \int_C \sqrt{6}\,z\,ds$, onde

$$\begin{aligned} ds &= \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt = \left\|\left(-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t,\ 3\cos t,\ -\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,t\right)\right\| dt \\ &= \sqrt{3\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 6\,\mathrm{sen}^2 t}\,dt = \sqrt{9\,\mathrm{sen}^2 t + 9\cos^2 t}\,dt = 3\,dt. \end{aligned}$$

Então,

$$M = \int_0^{\pi/2} \sqrt{6}\left(\sqrt{6}\cos t\right) 3\,dt = 18\left[\,\mathrm{sen}\,t\right]_0^{\pi/2} = 18\,u.m.$$

Exercício 31: Achar a massa de um fio delgado com a forma do arco de circunferência $x^2+y^2 = 4$ situado no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas

do ponto.

Solução: A nassa M do fio C é dada por:

$$M = \int_C \delta(x,y)\,ds = \int_C xy\,ds,$$

onde C é dado por $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le \pi/2$.

Temos $\vec{r}\,'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$ e $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t} = 2$, donde $ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = 2\,dt$.

Então,

$$M = \int_0^{\pi/2} (2\cos t)(2\operatorname{sen} t)2\,dt = 8\int_0^{\pi/2} \cos t\ \operatorname{sen} t\,dt = 8\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4.$$

Logo, $M = 4$ u.m.